CALCUL STOCHASTIQUE ET FINANCE
Département de Mathématiques Appliquées

Nizar TOUZI

SEANCE 6: Approche martingale pour le modèle de Black-Scholes
14 novembre 2012

Outline

Outline

Propriété de représentation prévisible

Théorème Pour toute v.a. $\mathcal{F}_T^W-$mesurable $\xi \in \mathbb{L}^2$, il existe un unique processus de $\mathbb{H}^2$ tel que

$$\xi = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T H_s dW_s$$

Par un argument d'approximation, on a aussi :

Théorème Pour toute v.a. $\mathcal{F}_T^W-$mesurable $\xi \in \mathbb{L}^1$, il existe un processus de $\mathbb{H}^2_{\mathrm{loc}}$ tel que

$$\xi = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T H_s dW_s$$

$\Longrightarrow$ représentation des martingales locale...

Théorème de Girsanov

- W MB dans $\mathbb{R}^d$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$
- ϕ processus $\mathbb{F}-$adapté, $\int_0^T |\phi_s|^2 ds < \infty$ $\mathbb{P}-$p.s. et

$$Z_T \quad := \quad e^{\int_0^T \phi_s \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\phi_s|^2 ds}$$

Théorème Supposons que $\mathbb{E}[Z_T] = 1$. Alors, le processus

$$\tilde{W}_t \; := \; W_t - \int_0^t \phi_s ds \,, \qquad t \leq T$$

est un mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{Q} := Z_T \cdot \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$

Remarque sur l'équivalence des deux probabilités

Dans le théorème de Girsanov, $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont deux mesures de probabilité équivalentes sur $\mathcal{F}_T$ pour tout $T > 0$. Mais cette propriété ne s'étend pas à $\mathcal{F}_\infty$

Exemple $\phi_t = \mu$ (constante). D'après la loi des grands nombres :

$$\mathbb{Q}\left[\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} W_t = \mu\right] = \mathbb{Q}\left[\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \tilde{W}_t = 0\right] = 1$$

mais

$$\mathbb{P}\left[\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} W_t = \mu\right] = 0$$

Complément $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes sur $\mathcal{F}_\infty$ si et seulement si la martingale $\{Z_t, t \geq 0\}$ est uniformément intégrable

Sur les martingales de Doléans-Dade

- W MB dans $\mathbb{R}^d$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$
- ϕ processus $\mathbb{F}-$adapté, $\int_0^T |\phi_s|^2 ds < \infty$ $\mathbb{P}-$p.s. et

$$Z_t \;:=\; \exp\left(\int_0^T \phi_s \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\phi_s|^2 ds\right), \qquad 0 \le t \le T$$

Théorème (Novikov) Supposons que $\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T |\phi_s|^2 ds}\right] < \infty$. Alors $\mathbb{E}[Z_T] = 1$ et le processus $\{Z_t,\ 0 \le t \le T\}$ est une martingale.

Outline

Actifs financiers

- $W = \{(W_t^1, \ldots, W_t^d), 0 \le t \le T\}$ MB dans $\mathbb{R}^d$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W = \{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ filtration canonique de W

- Actif sans risque S^0 correspondant au taux d'intérêt instantané r :

$$S_t^0 \;=\; \exp\left(\int_0^t r_u du\right), \qquad t \ge 0,$$

où $r = \{r_t, t \ge 0\}$ processus $\mathbb{F}-$adapté positif, $\int_0^T r_t dt < \infty$ p.s.

- d actifs risqués S^i, $i = 1, \ldots, d$, de processus de prix

$$S_t^i \;=\; S_0^i \exp\left(\int_0^t \left(\mu_u^i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d |\sigma_u^{ij}|^2\right) du + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_u^{ij} dW_u^j\right)$$

μ, σ processus $\mathbb{F}-$adaptés avec $\int_0^T |\mu_t^i| dt + \int_0^T |\sigma^{i,j}|^2 dt < \infty$, p.s.

Processus de prime de risque

- Formue d'Itô $\Longrightarrow$

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{i,j} dW_t^j, \ 1 \leq i \leq d,$$

ou, en notations matricielles :

$$dS_t = \mathrm{diag}[S_t] \left(\mu_t dt + \sigma_t dW_t\right)$$

- En termes de prix actualisés :

$$d\tilde{S}_t = \mathrm{diag}[\tilde{S}_t] \left\{(\mu_t - r_t \mathbf{1})dt + \sigma_t dW_t\right\} = \mathrm{diag}[\tilde{S}_t]\sigma_t \left(\lambda_t dt + dW_t\right).$$

où σ_t supposée inversibe, et λ est le processus de prime de risque :

$$\lambda_t := \sigma_t^{-1} \left(\mu_t - r_t \mathbf{1}\right), \ 0 \leq t \leq T,$$

Portefeuille

Une stratégie de portefeuille est un processus $\mathbb{F}-$adapté $\theta = \{\theta_t, 0 \le t \le T\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

• θ_t^i : montant (en Euros) investi en S^i, $1 \le i \le d$

• La condition d'autofinancement implique la dynamique du processus de richesse :

$$dX_t^\theta = \sum_{i=1}^d \frac{\theta_t^i}{S_t^i}\, dS_t^i + \frac{X_t - \theta_t \cdot \mathbf{1}}{S_t^0}\, dS_t^0$$

en termes de valeur actualisée :

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t &= \tilde{\theta}_t \cdot \mathrm{diag}[\tilde{S}_t]^{-1} d\tilde{S}_t \\ &= \tilde{\theta}_t \cdot \sigma_t \left(\lambda_t dt + dW_t\right) \end{aligned}$$

... conditions d'admissibilté sur θ à suivre...

Probabilité neutre au risque

Processus de prime de risque vérifie la condition de Novikov :

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T|\lambda_t|^2dt}\right] \quad < \quad \infty$$

Alors, d'après le théorème de Girsanov, le processus

$$B_t \quad := \quad W_t + \int_0^t \lambda_u du, \; 0 \le t \le T,$$

est un mouvement brownien sous la probabilité équivalente $\mathbb{Q}$:

$$Z_T := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \lambda_u \cdot dW_u - \frac{1}{2}\int_0^T |\lambda_u|^2 du\right)$$

En termes du $\mathbb{Q}-$ mouvement brownien B, on a :

$$d\tilde{S}_t = \mathrm{diag}[\tilde{S}_t]\sigma_t dB_t \quad \text{et} \quad d\tilde{X}_t^\theta = \tilde{\theta}_t \cdot \sigma_t dB_t$$

On dit que $\mathbb{Q}$ est une probabilité neutre au risque ou probabilité martingale (locale) équivalente

Portefeuilles admissibles et non arbitrage

Definition Un processus $\mathbb{F}-$adapté $\theta = \{\theta_t, t \in [0,T]\}$ est admissible, et on note $\theta \in \mathcal{A}$, si $\int_0^T |\sigma_t^{\mathrm{T}} \theta_t|^2 dt < \infty$, a.s. et :

$$\tilde{X}^\theta_. \geq M^\theta_. \quad \text{où} \quad M^\theta \text{ est une } \mathbb{Q}-\text{martingale}$$

Definition Le marché financier est sans arbitrage si, pour tout $\theta \in \mathcal{A}$,

$$X_0 = 0 \text{ et } X_T^\theta \geq 0 \ \mathbb{P} - \text{p.s.} \implies X_T^\theta = 0 \ \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

Théorème Notre marché financier est sans arbitrage

Problème de sur-couverture

Soit G une v.a. $\mathcal{F}_T-$mesurable, representant le payoff d'un produit dérivé de maturité $T > 0$. Le coût de sur-couverture est défini par :

$$V(G) \quad := \quad \inf\left\{X_0 \in \mathbb{R} \; : \; \exists\, \theta \in \mathcal{A},\; X_T^\theta \geq G \; \mathbb{P}-\text{a.s.}\right\}$$

$\longrightarrow$ dépend de $\mathbb{P}$ qu'à travers de ses négligeables...

• Si le marché est sans arbitrage, alors le prix de marché $p(G)$ de G vérifie :

$$-V(-G) \;\leq\; p(G) \;\leq\; V(G)$$

Couverture et évaluation par non arbitrage

Théorème Soit G une v.a. $\mathcal{F}_T-$mesurable, et $\tilde{G} := G \exp\left(-\int_0^T r_t dt\right)$. Supposons que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[|\tilde{G}|] < \infty$. Alors

$$p(G) \;=\; V(G) \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{G}]$$

De plus, il existe un portefeuille $\theta^* \in \mathcal{A}$ tel que $X_0^{\theta^*} = p(G)$ et $X_T^{\theta^*} = G$, p.s.

θ^* est le portefeuille de couverture parfaite, et est obtenu par représentation de $\tilde{G}$ sous $\mathbb{Q}$

Outline

1. Représentation des martingales, changement de mesure
2. Approche martingale pour la couverture
   - Marché financier
   - Portefeuille et processus de richesse
   - Sur-couverture et bornes d'arbitrage
3. Formule de Black-Scholes et pratique du modèle
   - Formule de Black-Scholes
   - Insuffisances du modèle de Black et Scholes – Calibration

Formule de Black et Scholes pour le call européen

- On considère un call européen $G = (S_T - K)^+$
- $\sigma_t = \sigma$ et $r_t = r$, constants

Formule de Black-Scholes :

$$p_0(G) \quad = \quad S_0 \, \mathbf{N}\left(\mathbf{d}_+(S_0, \tilde{K}_0^T, \sigma^2 T)\right) \; - \; \tilde{K}_0^T \, \mathbf{N}\left(\mathbf{d}_-(S_0, \tilde{K}_0^T, \sigma^2 T)\right)$$

où $N(x) = \mathrm{Prob}\left[\mathcal{N}(0,1) \leq x\right]$,

$$\tilde{K}_0^T := Ke^{-rT}, \qquad \mathbf{d}_\pm(s,k,v) := \frac{\ln(s/k)}{\sqrt{v}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{v},$$

et la stratégie de couverture parfaite est

$$\theta_t^* \;=\; S_t \mathbf{N}\left(\mathbf{d}_+(S_t, \tilde{K}_t^T, \sigma^2(T-t))\right), \qquad 0 \leq t \leq T$$

Les Grèques

Sensibilités de la formule de Black-Scholes par rapport aux paramètres du modèle

Δ	$\frac{\partial p_0}{\partial s} = \mathbf{N}(d_+)$
Γ	$\frac{\partial^2 p_0}{\partial s^2} = \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{T}}\mathbf{N}'(d_+) > 0$
Θ	$\frac{\partial p_0}{\partial t} = -\frac{S_0\sigma}{2\sqrt{T}}\mathbf{N}'(d_+) - rKe^{-rT}\mathbf{N}(d_-)$
Vega	$\frac{\partial p_0}{\partial \sigma} = S_0\sqrt{T}\mathbf{N}'(d_-)$
ρ	$\frac{\partial p_0}{\partial r} = KTe^{-rT}\mathbf{N}(d_-) > 0$

L'EDP d'évaluation donne une relation entre les grèques :

$$\Theta + rs\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\Gamma - rv = 0$$

Formule de Black-Scholes, coefficients déterministes

- On considère un call européen $G = (S_T - K)^+$
- $\sigma_t = \sigma(t)$ et $r_t = r(t)$, déterministes

On obtient la formule très utile :

$$p_0(G) \;=\; S_0\,\mathbf{N}\left(\mathbf{d}_+(S_0, \tilde{K}_0^T, \Sigma_0^T)\right) - \tilde{K}_0^T\,\mathbf{N}\left(\mathbf{d}_-(S_0, \tilde{K}_0^T, \Sigma_0^T)\right)$$

où

$$\tilde{K}_0^T := Ke^{-\int_0^T r(t)dt}, \qquad \Sigma_0^T := \int_0^T \sigma^2(t)dt,$$

et la stratégie de couverture parfaite est

$$\hat{\theta}_t \;=\; S_t\mathbf{N}\left(\mathbf{d}_+(S_t, \tilde{K}_t^T, \Sigma_t^T)\right), \qquad 0 \le t \le T$$

Effet leptokurtique

• L'analyse statistique des séries financières révèle une incompatibilité avec le modèle de Black-Scholes

• En particulier, les données réelles exhibent des queues de distribution épaisses, i.e. la loi normale sous-évalue la probabilité d'occurence des évènements extrêmes

• Les queues de distribution sont mesurées par la Kurtosis

$$\mathrm{Kurtosis}(X) \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)^4\right]}{\left\{\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)^2\right]\right\}^2}$$

• Si X est une gaussienne, $\mathrm{Kurtosis}(X) = 3$

• Par l'inégalité de Jensen, si X est conditionnellement gaussienne, $\mathrm{Kurtosis}(X) \geq 3 \Longrightarrow$ modèles ARCH, modèles à volatilité stochastique

Utilisation pratique du modèle de Black et Scholes

• Dans la formule de Black et Scholes, le paramètre de volatilité n'est pas observable

• Les praticiens ont rapidement vu que la volatilité historique, estimation du paramètre de volatilité par les données historique, ne permet pas de reconstituer les prix observés sur le marché

• Sur les marchés liquides, on utilise les prix des options pour déduire le paramètre de volatilité implicite, i.e.

$$c\left(t, S_t, K, T, \sigma^{\mathrm{imp}}\right) = c^{\text{marché}}\left(t, S_t, K, T\right)$$

• Finalement, dans les marchés liquides, le modèle d'évaluation est surtout utilisé pour l'objectif de couverture

Smile de volatilité

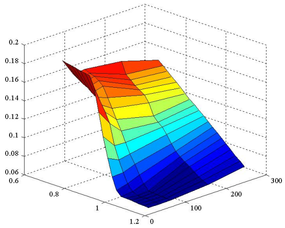

Figure: Surface de volatilité implicite

surface de volatilité implicite : le marché donne une plus grande valeur aux évenements extrêmes que le modèle de Black-Scholes

De la volatilité implicite à la calibration

• **Calibration** étant donné un modèle d'évaluation, on détermine les paramètres inobservables en utilisant les prix de marché des instruments liquides. Dans les modèles de taux d'intérêt, on calibre sur la courbe des taux et les prix des options...

• La nécessité de calibrer le modèle conditionne même la modélisation : on doit s'orienter vers un modèle qui produit des formules plus adaptées à la calibration et à l'interprétation

• Le modèle calibré est ensuite utilisé pour la couverture et l'évaluation des produit dérivés illiquides (structuration)

• La calibration doit être renouvelée dès que le marché évolue $\Longrightarrow$ changement de modélisation en cours d'utilisation, ce qui contredit la cohérence générale de la démarche ! !